Engenharia Econômica
Aulas 3 e 4

1. Conversões de taxas de juros:

1.0 Fórmulas para conversão de taxas de juros equivalentes

Existem duas situações básicas para a conversão de taxas de juros:

a) Conversão de uma taxa de **período de tempo menor** para uma taxa de **período de tempo maior**: Taxa semestral em taxa anual, taxa mensal em taxa anual, etc. Neste caso vamos aplicar a seguinte fórmula:

$$i_e = (1 + i_q)^n - 1 \quad \text{(equação 9)}$$

onde: i_e **=** taxa equivalente; i_q **=** taxa conhecida a ser convertida; n = número de períodos contidos no período da taxa de juros menor.

Exemplo:
converter uma taxa de 4% a.t. em taxa anual. $I_e = (1 + 0{,}04)^4 = 1{,}16985$
=> i_e **= 16,98% a.a.** Neste caso n = 4, uma vez que um ano contém 4 trimestres.

b) Conversão de uma taxa de **período de tempo maior** para uma taxa de **período de tempo menor**: taxa anual em taxa trimestral, taxa semestral em taxa mensal, etc.

1. Conversões de taxas de juros:

Vamos, neste caso aplicar a seguinte fórmula:

$$i_e = \sqrt[n]{(1+i_q)} - 1$$

onde: $\mathbf{i_e}$ **=** taxa equivalente; $\mathbf{i_q}$ **=** taxa conhecida a ser convertida; n = número de períodos contidos no período da taxa de juros menor.

Exemplo:
Converter uma taxa de 40% a.a. em taxa quadrimestral.

$$i_e = \sqrt[3]{(1,4)} - 1$$

$$i_e = \sqrt[3]{(1+0,4)} - 1$$

=> 11,87% a.q.

1. Conversões de taxas de juros:

Exercício

Calcular a taxa equivalente mensal de uma taxa de:

1. 100% a.a.;
2. 82% a.a.;
3. 28% a.s.;
4. 28% a.a. ;
5. 32% a.t.

Exercícios

1. **Determinar o montante no final de 10 meses, resultante da aplicação de um capital de $ 100.000,00 a taxa de 3,75% a.m.**
   R: $ 144.504,39

2. **Uma pessoa empresta $ 80.000,00 hoje para receber $ 507.294,46 no final de 2 anos. Calcular as taxas mensal e anual desse empréstimo.**
   R: 8% a.m. ou 151,817% a.a.

3. **Sabendo-se que a taxa trimestral de juros cobrada por uma institução finaceira é de 12,486%, determinar qual o prazo em que um empréstimo de $ 20.000,00 será resgatado por $ 36.018,23.**
   R: 5 trimestres ou (15 meses).

4. **Quanto devo aplicar hoje, a taxa de 51,107% a.a. para ter $ 1.000.000,00 no final de 19 meses.**
   R: $ 520.154,96.

5. **Em que prazo uma aplicação de $ 374.938,00 a taxa de 3.25% a.m., gera um resgate de $ 500.000,00**
   R: 9 meses.

2. Fluxo de Caixa:

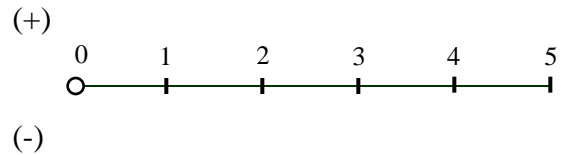
2.1 Conceito de Fluxo de caixa

A resolução de problemas de matemática financeira torna-se muito mais fácil quando utilizamos o conceito de fluxo de caixa.Um fluxo de caixa é uma representação gráfica de uma série de entradas (recebimentos) e saídas (pagamentos). As saídas são representadas por uma seta para baixo e as entradas por uma seta para cima.

Exercício:

Representar as seguintes entradas e saídas num diagrama de fluxo de caixa:

Período	Saída ($)	Entrada ($)
0	- 1000	0
1	-500	+ 800
2		+ 800
3		+ 1000
4		+ 1500
5	-200	+ 1800

2. Fluxo de Caixa:

O fluxo acima pode ser simplificado, de acordo com a representação abaixo:

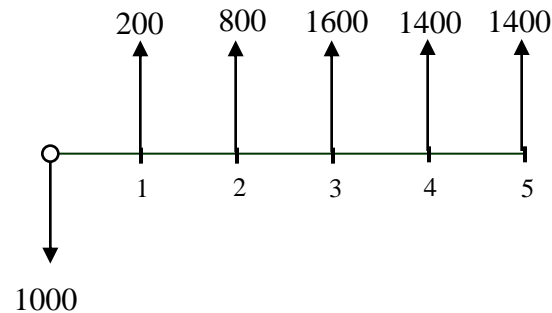
2.2 Métodos de avaliação de fluxos de caixa

Os métodos mais utilizados de avaliação de fluxos de caixa são: (a) o **método do valor presente líquido** (VPL) e (b) o **método da taxa interna de retorno** (TIR), que veremos mais a frente, na seção avaliação de investimentos.

2.2.1 Cálculo do valor de um fluxo de caixa

São definidas algumas regras básicas para o cálculo do valor númerico de um fluxo de caixa: (i) o fluxo deve ser inicialmente simplificado, (ii) o fluxo deve ser calculado em um determinado período de tempo, isto é, todas as entradas e saídas devem ser trazidas para uma mesma data e (iii) as entradas e saídas devem ser trazidas para este período de tempo.

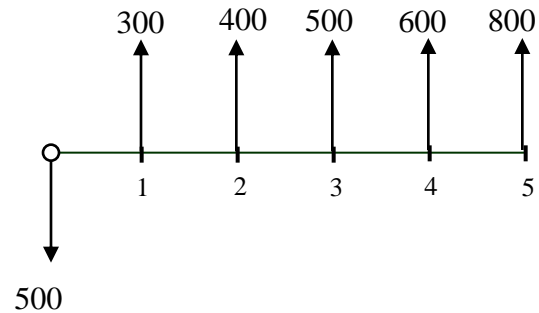
2. Fluxo de Caixa:

Exemplo:
Calcular o seguinte fluxo de caixa, $FC_{(0)}$, considerando-se uma taxa de juros de 5% a.p.:

Descontando todas as saídas e entradas e trazendo para o momento 0, temos:

$FC(0) = -1000 + 200/(1+0,05)^1 + 800/(1+0,05)^2 + 1600/(1+0,05)^3 + 1400/(1+0,05)^4 + 1400/(1+0,05)^5 = -1000 + 190,47 + 725,62 + 1382,14 + 1151,78 + 1096,93 = \$\ 3546,94$

2. Fluxo de Caixa:

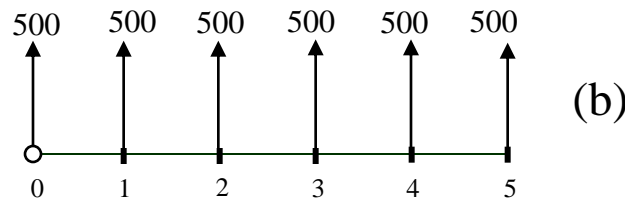
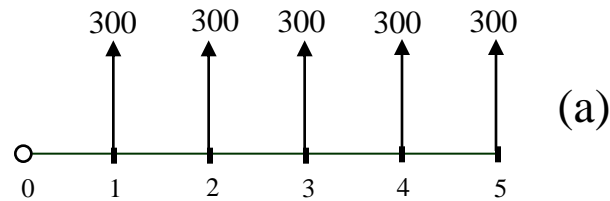
Exercício:

Calcular o seguinte fluxo de caixa, $FC_{(3)}$, considerando-se uma taxa de juros de 10% a.p.:

$FC_{(3)} =$ [ ]

3. Séries uniformes:

3.1 Cálculo de uma série uniforme postecipada

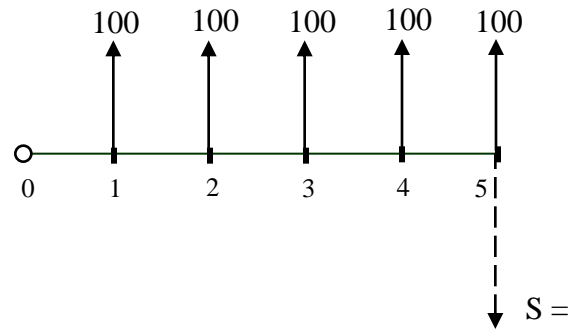
Podemos entender uma série uniforme de pagamentos como uma série de pagamentos que possui as seguintes características: (i) os valores dos pagamentos são todos iguais; e (ii) consecutivos, como ilustrado abaixo:

Fig. 2.3: Série uniforme postecipada (a) e antecipada (b).

3.1 Série postecipada e antecipada

Numa série postecipada (a) o primeiro pagamento ocorre a partir do primeiro período, enquanto uma série antecipada (b) é caracterizada pelo fato do primeiro pagamento ocorrer no início do período.

3. Séries uniformes:

3.1 Cálculo do montante S de uma série uniforme postecipada

Consideremos uma série uniforme postecipada, descontada mensalmente a uma taxa de 4%, como mostrado abaixo:

É possível calcular o valor futuro da série com o uso de fórmulas já conhecidas:

S_1 = 100 x $(1{,}04)^4$ = 100 x 1,16986 = 116,98
S_2 = 100 x $(1{,}04)^3$ = 100 x 1,12486 = 112,49
S_3 = 100 x $(1{,}04)^2$ = 100 x 1,08160 = 108,16
S_4 = 100 x $(1{,}04)^1$ = 100 x 1,04000 = 104,00
S_5 = 100 x $(1{,}04)^0$ = 100 x 1,10000 = 100,00
S_t = ... = 541,63

Assim, podemos concluir que, o montante de 5 aplicações, mensais e consecutivas aplicadas a um taxa de 4% a.m. acumula um montante de $ 541,63.

3. Séries uniformes:

Sabemos que $S_t = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$, substituindo S_1, S_2, S_3..., por seus respectivos valores temos:

$$S_t = 100 \text{ x } (1{,}04)^4 + 100 \text{ x } (1{,}04)^3 + 100 \text{ x } (1{,}04)^2 + 100 \text{ x } (1{,}04)^1 + 100 \text{ x } (1{,}04)^0.$$

Como o fator 100 é comum a todos os termos, podemos agrupar a expressão acima:

$$S_t = 100 \{ (1{,}04)^0 + (1{,}04)^1 + (1{,}04)^2 + (1{,}04)^3 + (1{,}04)^4 \} \text{ (equação 10)}$$

Como a série entre chaves, acima, representa a soma de uma **progressão geométrica** de razão 1,04, podemos aplicar a seguinte fórmula,

$$\frac{a_1 \times q^n - a_1}{q - 1}$$

que nos fornece a soma dos termos de uma PG, com $a_1 = (1{,}04)^0 = 1$, $q = 1{,}04$ e $n = 5$.

Transformando a equação 10 com a inclusão da fórmula da soma de uma PG, como mostrado acima, obtemos:

$$100 \times \frac{1 \times (1{,}04)^5 - 1}{1{,}04 - 1} \quad \text{(equação 11)}$$

3. Séries uniformes:

Substituindo os termos genéricos na equação 11, obtemos:

$$F = A \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \text{ (equação 12)}$$

onde:
S = montante acumulado da série uniforme postecipada; A = valor das prestações;
i = taxa de Juros e n = número de períodos ou prestações.

A expressão $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ é chamada, também, de maneira análoga, as séries simples, **de fator de acumulação de capital**, FAC . Assim, a série uniforme postecipada, mostrada no início da seção 3.1 poderia, também, ser calculada da seguinte forma:

$$\mathbf{F = 100 \text{ x } FAC}_{(4\%,5)} = \mathbf{100 \text{ x } 5{,}41632} = \$\ 541{,}63$$

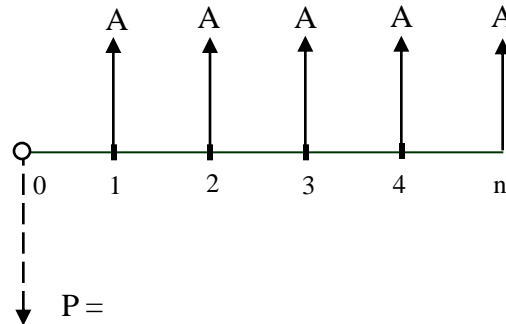
3.2 **Cálculo do valor das prestações A, conhecido o montante acumulado S**
Podemos transformar a equação 12, colocando A em função de S:

$$A = F \times \frac{i}{(1+i)^n} \quad \text{(equação 13)}$$

A expressão $\frac{i}{(1+i)^n - 1}$ é denominada de fator de formação de capital (FFC), encontando-se tabelada, como anexo, na maioria dos livros de matemática financeira.

3. Séries uniformes:

3.3 **Cálculo do valor presente P de uma série uniforme postecipada**

Consideremos uma série uniforme antecipada do tipo:

O valor presente P, pode ser calculado através da fórmula:

$$P = A \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \quad \text{(equação 14)}$$

onde:

P = valor presente das prestações da série postecipada; A = valor das prestações; n = número das prestações.

O fator $\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$ é denominado fator de valor atual, FVA, sendo encontrado, como anexo, em tabelas em livros de matemática financeira.

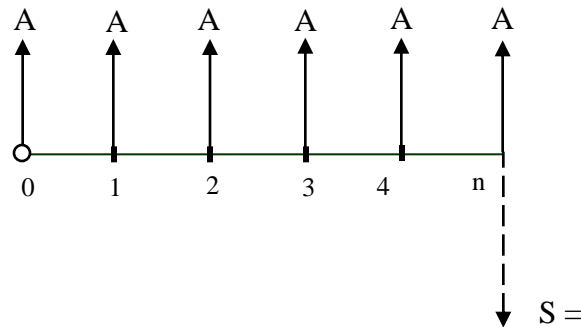
3. Séries uniformes:

Exercício

Calcular o valor atual de uma série de 12 prestações mensais, iguais e consecutivas de $150, capitalizadas a uma taxa mensal de $ 5% ao mes.

$$P = A \text{ x } FVA_{(5\%,12)} = 150 \text{ x } 8{,}86325 = \$ \; 1.329{,}48$$

3.3 **Cálculo do montante S de uma série uniforme antecipada**

Consideremos uma série uniforme antecipada do tipo:

O montante S pode ser calculado através da fórmula:

$$S = A \times (1+i) \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \quad \text{(equação 15)}$$

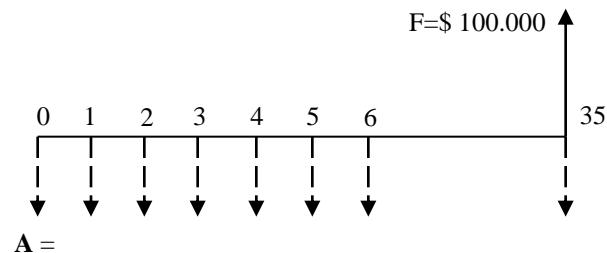
onde:

S = montante acumulado no final do período; A = valor das prestações; i = taxa de juros.

3. Séries uniformes:

Note, que a expressão entre parentesis, indicada na equação 15, nada mais é que o fator de acumulação de capital, FAC, para séries uniformes postecipadas.E, portanto, a equação 15 pode ser escrita da seguinte maneira:

$$F = A \times (1+i) \times FAC_{(i\%,n)} \quad \text{(equação 16)}$$

Exemplo:
Quanto terei de aplicar mensalmente, a partir de hoje, para acumular no final de 36 meses, um montante de $ 100.000,00, sabendo-se que a taxa de juros contratada é de 34,489% ao ano, que as prestações são iguais e consecutivas e a primeira prestação é depositada no período 0.

Vamos, inicialmente, transformar a taxa anual em taxa mensal:

$$i_m = \sqrt[12]{(1+0{,}34489)} - 1 = 1{,}024999 - 1 => i = 2{,}5\% a.m.$$

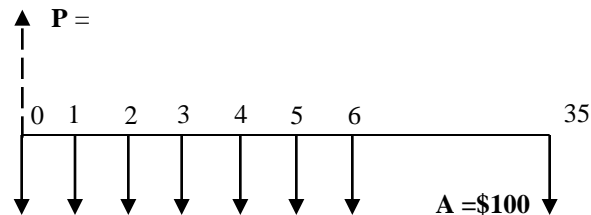
3. Séries uniformes:

Transformando a equação 16, e colocando A (prestação) em função de S (valor futuro acumulado das prestações) obtemos:

$$A = F \times \frac{1}{(1+i)} \times \frac{i}{(1+i)^{n-1}} = S \times \frac{1}{(1+i)} \times FFC_{(i\%,n)}$$

Aplicando a fórmula acima, com S = $ 100.000,00, i = 2,5% a.m. e n = 36, obtemos:

A = 100.000 x 1/(1+0,025) x $FFC_{(2,5\%,36)}$= 100.000 x 0,97560 x 0,01745 = $ 1.702,42

3.4 **Cálculo do valor presente P de uma série uniforme antecipada**
Consideremos uma série uniforme antecipada do tipo:

O valor presente P pode ser calculado através da expressão:

$$P = A \times (1+i) \times FVA_{(i\%,n)}$$ (equação 17)

Exemplo:
Determinar o valor presente do financiamento de um bem financiado em 36 prestações iguais de $ 100,00, sabendo-se que a taxa de juros cobrada é de 3,0% a.m. e que a primeira prestação é paga no ato da assinatura do contrato.

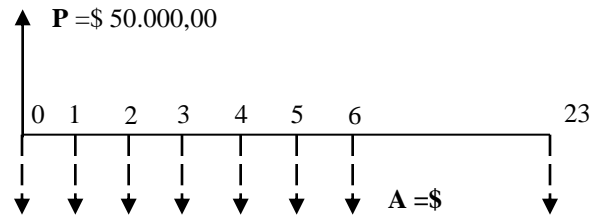
Fazendo uso da equação 17:

$$P = A \text{ x } (1+i) \text{ x } FVA_{(3,0,\%,36)} = 100 \text{ x } (1,03) \text{ x } 21,83225 = \$\ 2248,72$$

3.5 **Cálculo da prestação A, dado o valor presente P de uma série uniforme antecipada**
Nestas condições, o valor A da prestação pode ser calculado a partir da transformação da equação 17:

$$A = P\frac{1}{(1+i)} \times \left[\frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}\right] = P \times \frac{1}{(1+i)} \times FRC_{(i\%,n)}$$ (equação 18)

3. Séries uniformes:

Exemplo:
Um terreno é colocado a venda por $ 50.000,00 a vista ou em 24 prestações mensais sendo a primeira prestação paga na data do contrato. Determinar o valor de cada parcela, sabendo-se que o proprietário está cobrando uma taxa de 3,5 % a.a. pelo financiamento.

Aplicando a equação 18, obtemos:

$$A = P \times \frac{1}{(1+i)} \times FRC_{(i\%,n)} = 50.000 \times \frac{1}{(1+0,035)} \times 0,06227 = \$3.008,21$$

Exercícios

1. **Um investidor depositou, anualmente, $ 1000,00 numa conta de poupança, em nome de seu filho, a juros de 6% a.a. O primeiro depósito foi feito no dia em que seu filho completou 1 ano e o último quando este completou 18 anos. O dinheiro ficou depositado até o dia em que completou 21 anos, quando o montante foi sacado. Quanto recebeu seu filho.**
   R: $ 36.809,24

2. **Quanto deverá ser aplicado, a cada 2 meses, em um fundo de renda fixa, a taxa de 5% ao bimestre, durante 3 anos e meio, para que se obtenha, no final deste prazo, um montante de $ 175.000,00.**
   R: $ 4.375,00

3. **Qual é o montante obtido no final de 8 meses, referente a uma aplicação de $ 500,00 por mes, a taxa de 42,5776% ao ano.**
   R: $ 4.446,17

4. **Quantas aplicações mensais de $ 500,00 são necessárias para se obter um montante de $ 32.514,00, sabendo-se que a taxa é de 3,00% a.m., e que a primeira aplicação é feita no ato da assinatura do contrato e a última 30 dias antes do resgate daquele valor.**
   R: 36 aplicações.

5. **O Sr. Laerte resolveu fazer 12 aplicações mensais, como segue:**
   a) 6 prestações iniciais de $ 1000 cada uma;
   b) 6 prestações restantes de $ 2000,00 cada uma.
   Sabendo-se que esta aplicação está sendo remunerada a 3,0% a.m., calcular o saldo acumulado de capital mais juros que estará a disposição do Sr. Laerte no final do prazo de aplicação.
   R:2.066,04

4. Séries variáveis:

Podem ocorrer dois tipos de variações:

a) Variações de acordo com uma lei de formação (variações em PA, PG)

b) Variações sem obediência a qualquer lei de formação

As séries variáveis também podem ser com termos vencidos ou com termos antecipados.

Vamos examinar então:

4.1 Séries variáveis com termos vencidos de acordo com uma lei de formação:

4.1.1 Séries de pagamentos variáveis com termos vencidos em Progressão Aritmética Crescente

4.1.2 Séries de pagamentos variáveis com termos vencisdos em Progressão Aritmética Decrescente

4. Séries variáveis:

4.2 Séries variáveis com termos antecipados de acordo com uma lei de formação:

4.2.1 Séries de pagamentos variáveis com termos antecipados em Progressão Aritmética Crescente

4.2.2 Séries de pagamentos variáveis com termos antencipados em Progressão Aritmética Decrescente

4.3 Séries variáveis com variações sem obediência a qualquer lei de formação